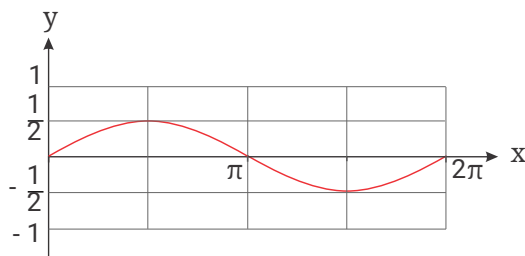
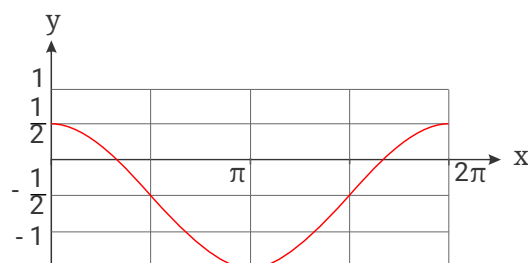


۱ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{1}{2} \sin x$ را نشان می‌دهد.



ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x - \frac{1}{2}$ را نشان می‌دهد.



پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور x ها انتقال دهیم.
ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

پاسخ: الف - درست، برای رسم نمودار $y = \frac{1}{2} \sin x$ کافی است برد نمودار $y = \sin x$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم.

ب - درست، برای رسم نمودار $y = \cos x - \frac{1}{2}$ کافی است نمودار $y = \cos x$ را $\frac{1}{2}$ واحد به سمت پایین انتقال دهیم.

پ - نادرست، برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور y ها انتقال دهیم.
ت - درست

۲ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه x	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	330°
نسبت								
$\sin x$								
$\cos x$								
$\tan x$								
$\cot x$								



پاسخ:

زاویه x	۱۲°	۱۳۵°	۱۵°	۲۱°	۲۲۵°	۲۴°	۳۰°	۳۳°
نسبت								
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

۳ در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید:

$$\sin x = \cos(۲^\circ + x)$$

پاسخ:

$$\rightarrow x + ۲^\circ + x = ۹^\circ + (k \times ۳۶^\circ)$$

$$k = 0 \rightarrow ۲x = ۷^\circ \rightarrow x = ۳.۵^\circ$$

$$k = 1 \rightarrow ۲x + ۲^\circ = ۴۵^\circ \rightarrow ۲x = ۴۳^\circ \rightarrow x = ۲۱.۵^\circ$$

$$k = 2 \rightarrow ۲x + ۲^\circ = ۸۱^\circ \rightarrow ۲x = ۷۹^\circ \rightarrow x = ۳۹.۵^\circ \rightarrow x = ۳۵^\circ \text{ تکراری}$$

۴ بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin ۸۴^\circ = \sin ۶^\circ$

ب) $\cos(-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۶^\circ$

پ) $\tan(-۱۰۰۰^\circ) = \tan ۸^\circ$

ت) $\sin ۸۷۵^\circ = \sin ۱۵۵^\circ$

پاسخ:

الف) $\sin ۸۴^\circ = \sin(۲ \times ۳۶^\circ + ۱۲^\circ) = \sin(۱۲^\circ) = \sin(۱۸^\circ - ۶^\circ) = \sin ۶^\circ$

ب) $\cos(-۳۲۴^\circ) = \cos(۳۶^\circ - ۳۲۴^\circ) = \cos(۳۶^\circ)$

پ) $\tan(-۱۰۰۰^\circ) = \tan(۳ \times ۳۶^\circ - ۱۰۰۰^\circ) = \tan ۸^\circ$

ت) $\sin ۸۷۵^\circ = \sin(۲ \times ۳۶^\circ + ۱۵۵^\circ) = \sin ۱۵۵^\circ$

۵ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

پاسخ:

$$r = ۱۰ \text{ cm} \quad l = ۸ \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{۸}{۱۰} \rightarrow \alpha = ۰.۸ \text{ رادیان}$$

۶ زاویه D بر حسب درجه برابر با $\frac{\pi}{20}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

پاسخ:

$$D = \frac{\frac{\pi}{20}}{\pi} \times 180^\circ = 9^\circ \rightarrow \frac{\pi}{20} = 9^\circ$$

۷ هریک از زاویه‌های $\frac{\pi}{18}$ رادیان، $-\frac{2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{3\pi}{4}$ رادیان، $\frac{7\pi}{8}$ رادیان و $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به‌طور تقریبی روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

پاسخ:

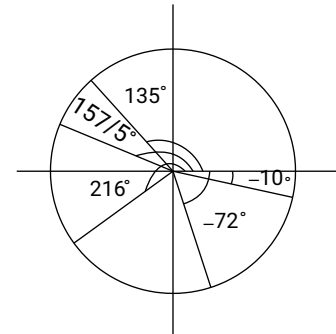
$$D = \frac{-\frac{\pi}{18}}{\pi} \times 180^\circ = -10^\circ \rightarrow -\frac{\pi}{18} = -10^\circ$$

$$D = \frac{-\frac{2\pi}{5}}{\pi} \times 180^\circ = -72^\circ \rightarrow -\frac{2\pi}{5} = -72^\circ$$

$$D = \frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} \times 180^\circ = 135^\circ \rightarrow \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

$$D = \frac{\frac{7\pi}{8}}{\pi} \times 180^\circ = 157,5^\circ \rightarrow \frac{7\pi}{8} = 157,5^\circ$$

$$D = \frac{\frac{6\pi}{5}}{\pi} \times 180^\circ = 216^\circ \rightarrow \frac{6\pi}{5} = 216^\circ$$



۸ هریک از زاویه‌های -12° ، 36° ، 72° ، -105° و 315° را به رادیان تبدیل کنید.

پاسخ:

$$R = \frac{-12^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{-\pi}{15} \rightarrow -12^\circ = -\frac{\pi}{15} \text{ رادیان}$$

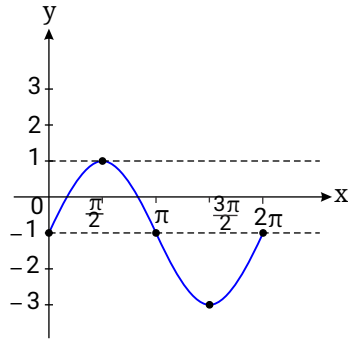
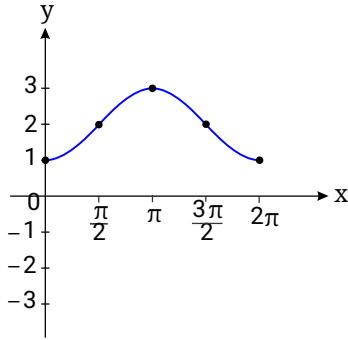
$$R = \frac{36^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{\pi}{5} \rightarrow 36^\circ = \frac{\pi}{5} \text{ رادیان}$$

$$R = \frac{72^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{2\pi}{5} \rightarrow 72^\circ = \frac{2\pi}{5} \text{ رادیان}$$

$$R = \frac{-105^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{-7\pi}{12} \rightarrow -105^\circ = -\frac{7\pi}{12} \text{ رادیان}$$

$$R = \frac{315^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{7\pi}{4} \rightarrow 315^\circ = \frac{7\pi}{4} \text{ رادیان}$$

۹ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدامیک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.



الف) $y = 2 \cos x + 1$

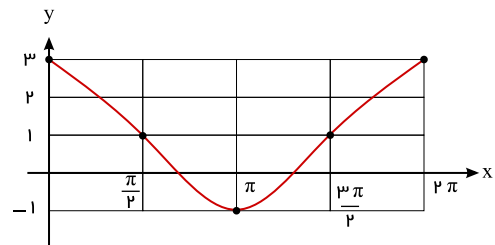
ب) $y = 2 \sin x - 1$

پ) $y = 2 - \cos x$

ت) $y = \sin x - 2$

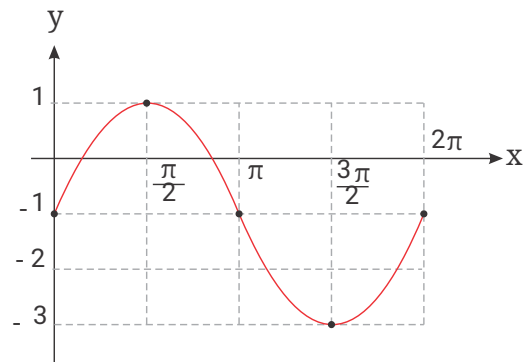
پاسخ: الف)

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	۱	۰	-۱	۰	۱
$2 \cos x + 1$	۳	۱	-۱	۱	۳



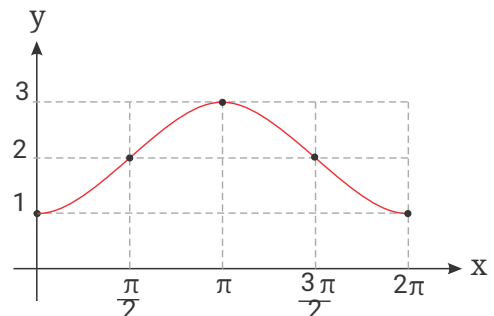
(ب)

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰
$2 \sin x - 1$	-۱	۱	-۱	-۳	-۱



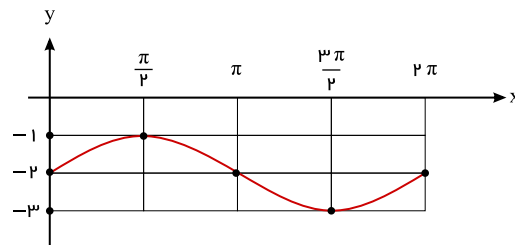
(پ)

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	۱	۰	-۱	۰	۱
$2 - \cos x$	۱	۲	۳	۲	۱



(ت)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\sin x - 2$	-2	-1	-2	-3	-2



۱۰ نمودار هریک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

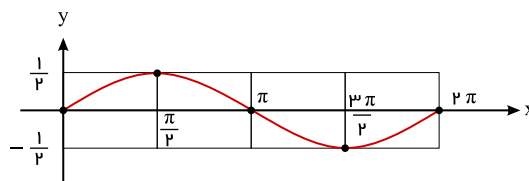
پاسخ:

الف)

$$y = \frac{1}{2} \sin x, \quad [0, 2\pi]$$

پاسخ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\frac{1}{2} \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0



ب)

$$y = 2 \cos x + 1, \quad [-2\pi, 2\pi]$$

پاسخ:

پ)

$$y = 1 - \sin x, \quad [-2\pi, 2\pi]$$

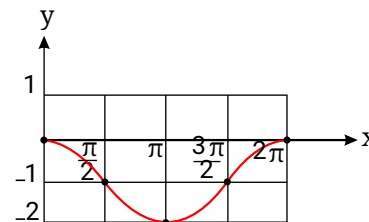
پاسخ:

ت)

$$y = -1 + \cos x, \quad [-4\pi, 4\pi]$$

پاسخ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\cos x - 1$	0	-1	-2	-1	0



ث)

$$y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad [0, 2\pi]$$

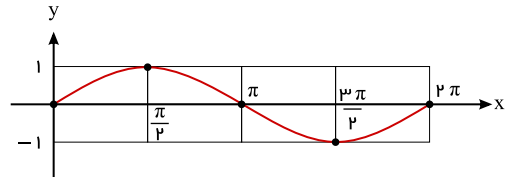
پاسخ:

ج

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad [2\pi, 4\pi]$$

پاسخ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x - \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	0	1	0	-1	0



۱۱ حاصل هریک از عبارتهای زیر را بدست آورید.

پاسخ:

الف

$$\tan 135^\circ + \cot 12^\circ$$

پاسخ:

$$\tan 135^\circ + \cot 12^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) + \cot(180^\circ - 6^\circ) = -\tan 45^\circ - \cot 6^\circ = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ب

$$\cos(-21^\circ) + \cot(24^\circ)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \cos(-21^\circ) + \cot(24^\circ) &= \cos(21^\circ) + \cot(24^\circ) = \cos(180^\circ + 3^\circ) + \cot(180^\circ + 6^\circ) \\ &= -\cos 3^\circ + \cot 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

پ

$$\sin 63^\circ + \tan(-54^\circ)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \sin 63^\circ + \tan(-54^\circ) &= \sin(72^\circ - 9^\circ) + \tan(-36^\circ - 18^\circ) \\ &= \sin(-9^\circ) + \tan(-18^\circ) = -\sin 9^\circ - \tan 18^\circ = -1 - 0 = -1 \end{aligned}$$

ت

$$\cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan(72^\circ) - \tan(-60^\circ)$$



پاسخ:

$$\begin{aligned} & \cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan(72^\circ) - \tan(-60^\circ) \\ &= \cos(-72^\circ + 72^\circ) + \cot(72^\circ - 60^\circ) + \tan(72^\circ + 0^\circ) - \tan(72^\circ - 60^\circ) = \\ & \cos(0^\circ) + \cot(12^\circ) + \tan(0^\circ) - \tan(12^\circ) = \\ & \cos(0^\circ) + \cot(180^\circ - 60^\circ) + \tan(0^\circ) - \tan(180^\circ - 60^\circ) = \\ & \cos(0^\circ) - \cot(60^\circ) + \tan(0^\circ) + \tan(60^\circ) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \sqrt{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

ث

$$\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) &= \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ج

$$\frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{-4\pi}{3}\right)}$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{-4\pi}{3}\right)} &= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(2\pi - \frac{4\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} - (-\cos \frac{\pi}{6})}{-\sin \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

۱۲ آیا نمودار هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق هستند یا خیر؟

پاسخ:

الف

$$y = \sin x, \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

پاسخ:

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

ب

$$y = \cos x, \quad y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

پاسخ:

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

پ

$$y = \cos x, \quad y = \cos(2\pi - x)$$

پاسخ:

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

ت

$$y = \sin x, \quad y = \sin(5\pi - x)$$

پاسخ:

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \sin(5\pi - x) = \sin(\cancel{\pi} + \pi - x) = \sin x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

۱۳ درستی یا نادرستی هریک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

پاسخ:

الف

اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچک تر از اندازه هریک از ساق‌های آن

است.

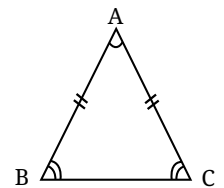
پاسخ:

$$\hat{A} = 1 \text{ rad}, \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi, \quad \hat{B} = \hat{C}$$

$$\rightarrow 1 + \hat{B} + \hat{C} = \pi \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \pi - 1$$

$$\rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi - 1}{2} \simeq 1,07 \text{ rad}$$

$$\hat{B} + \hat{C} > \hat{A} \rightarrow AC = AB > BC \rightarrow \text{گزاره درست است}$$


ب

 در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با ۳٫۱۴ سانتی‌متر است.

پاسخ:

$$r = 1 \text{ cm}, \quad \alpha = \pi \text{ rad}, \quad \ell \simeq 3,14 \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \rightarrow \ell = \alpha \cdot r = \pi \times 1 \simeq 3,14 \text{ cm} \rightarrow \text{گزاره درست است}$$

پ

 انتهای کمان زاویه $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد.



پاسخ:

$$D = \frac{6\pi}{\pi} \times 180^\circ \rightarrow D = 216^\circ \rightarrow \text{گزاره نادرست است} \rightarrow \text{انتهای کمان} \rightarrow 216^\circ \text{ در ربع سوم قرار دارد} \rightarrow D = \frac{5}{\pi} \times 180^\circ$$

ت زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان، $\frac{\pi}{9}$ رادیان، $\frac{7\pi}{36}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

پاسخ:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi}{36} + \frac{4\pi}{36} + \frac{7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \neq \pi$$

گزاره نادرست است.